Ejercicios de Análisis Matemático
Continuidad y límite funcional - Soluciones

Ejercicio 1. Estudia la continuidad de la función $f:[0,4]\to\mathbb{R}$ dada por $f(1)=1/4$ y:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-1|}{(x^2-1)E(1+x)} & \text{si } x\in[0,1[\cup]1,2]\\ E(x)-7/4 & \text{si } x\in]2,4]\end{cases}\qquad \big(E(x) \text{ es la parte entera de } x\big)$$

Solución. Creo que, para evitar equivocaciones, la mejor forma de hacer este ejercicio es tener en cuenta cómo es la función en cada intervalo. Teniendo en cuenta que $x^2-1=(x+1)(x-1)$, podemos simplificar factores comunes y resulta que:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-1}{x+1} & \text{si } x\in[0,1[\\ \dfrac{1}{2(x+1)} & \text{si } x\in[1,2[\\ 1/9 & \text{si } x=2\\ 1/4 & \text{si } x\in]2,3[\\ 5/4 & \text{si } x\in[3,4[\\ 9/4 & \text{si } x=4\end{cases}$$

La función f es claramente continua en los intervalos $[0,1[$, $]1,2[$, $]2,3[$ y $]3,4[$. Tenemos que:

$$\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{-1}{x+1}=-1/2\neq\lim_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{1}{2(x+1)}=1/4=f(1).$$

En $x=1$ hay una discontinuidad de salto (aunque f es continua por la derecha en $x=1$).

$$\lim_{\substack{x\to2\\x<2}} f(x)=\lim_{\substack{x\to2\\x<2}}\frac{1}{2(x+1)}=1/6\neq\lim_{\substack{x\to2\\x>2}} f(x)=1/4.$$

En $x=2$ hay una discontinuidad de salto (f es discontinua por la izquierda y por la derecha en $x=2$).

$$\lim_{\substack{x\to3\\x<3}} f(x)=1/4\neq\lim_{\substack{x\to3\\x>3}} f(x)=5/4=f(3).$$

En $x=3$ hay una discontinuidad de salto (aunque f es continua por la derecha en $x=3$).

$$\lim_{x\to4} f(x)=\lim_{\substack{x\to4\\x<4}} f(x)=5/4\neq 9/4=f(4).$$

En $x=4$ hay una discontinuidad evitable. ☺

Comentarios. Los fallos más frecuentes en este ejercicio se deben a errores de cálculo por descuido. Algunos aplican las reglas de L'Hôpital e incluso derivan la función parte entera (deben pensar que todo vale). Otros creen que con decir que la función no es continua en todo el intervalo ya han estudiado la continuidad de la función. Pues no. Estudiar la continuidad de una función es ver dónde es continua y en qué puntos es discontinua y clasificar las discontinuidades.

Ejercicio 2. Sea $a>1$. Prueba que la ecuación $x+\mathrm{e}^{-x}=a$ tiene al menos una solución positiva y otra negativa.

Solución. Naturalmente, se trata de probar que la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=x+\mathrm{e}^{-x}-a$ se anula en algún valor negativo y en algún valor positivo. En seguida se da uno cuenta de que

$f(0) = 1 - a < 0$. También es fácil caer en la cuenta de que $f(a) = e^a > 0$. Tenemos así que f es una función continua definida en $\mathbb{R}$ (que es un intervalo) y $f(0) < 0$, $f(a) > 0$. El teorema de Bolzano nos dice que debe haber algún punto $c_1 \in]0, a[$ tal que $f(c_1) = 0$.

No es tan inmediato encontrar algún valor concreto $\alpha < 0$ tal que $f(\alpha) > 0$. Pero observando que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, se deduce que para valores negativos suficiente pequeños de x la función $f(x)$ toma valores positivos tan grandes como queramos. En particular, *tiene que existir* $\alpha < 0$ tal que $f(\alpha) > 0$. Razonamos ahora igual que antes, para concluir por el teorema de Bolzano que hay algún punto $c_2 \in]\alpha, 0[$ tal que $f(c_2) = 0$. ☺

Comentarios. Se trata de un ejercicio típico en el que debemos aplicar el teorema de Bolzano. Basta para ello seguir la estrategia vista en clase. Algunos dan valores particulares al punto a. No debe hacerse, todo lo que se sabe de a es que $a > 1$ y eso es suficiente para hacer el ejercicio. Algunos hacen el ejercicio sin usar la hipótesis de que $a > 1$. Naturalmente, lo hacen mal. Como norma, *si en el enunciado de un ejercicio se hace una hipótesis y tú no la usas para resolverlo es que no lo has hecho bien*. Algunos razonan sobre una gráfica. Una gráfica no demuestra nada. Me parece estupendo que uséis gráficas porque eso ayuda, pero no se debe razonar tomando como base una gráfica. *Lo que yo valoro es que sepas aplicar el teorema de Bolzano en un caso concreto y que sepas explicar lo que haces*. Algunos toman $\alpha = -a$ y afirman que $f(-a) > 0$. Eso es cierto pero no es evidente.

Ejercicio 3. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua y verificando que $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ para todo $x \in [0,1]$. Prueba que hay algún $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = 1 - c^2$.

Solución. Otro ejercicio típico del teorema de Bolzano. Se trata de probar que en algún punto $c \in [0,1]$ se verifica que $f(c) - 1 + c^2 = 0$. Naturalmente, esto lleva a definir la función $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ por $h(x) = f(x) - 1 + x^2$. Se trata de probar que h se anula en algún punto. Como se supone que f es continua, la función h es continua en el intervalo $[0,1]$. Además $h(0) = f(0) - 1 \leqslant 0$ y $h(1) = f(1) \geqslant 0$. Si $h(0) = 0$ basta tomar $c = 0$. Si $h(1) = 0$ basta tomar $c = 1$. En otro caso se tiene que $h(0) < 0$ y $h(1) > 0$ y el teorema de Bolzano asegura que hay algún punto $c \in]0,1[$ tal que $h(c) = 0$. ☺

Comentarios. Algunos afirman que la imagen de f es todo el intervalo $[0,1]$. Basta pensarlo medio minuto para darse cuenta de que no tiene por qué ser así. De la función f lo único que sabemos es que es continua y que $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ para todo $x \in [0,1]$. Podría ser $f(x) = 1/4$ para todo $x \in [0,1]$. Hay quien sigue sin distinguir entre "$<$" y "$\leqslant$" y entre "$>$" y "$\geqslant$". Quizás se necesiten dos cursos para aprender a hacerlo.

Ejercicio 4. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, pongamos $M = \max f([a,b])$, $m = \min f([a,b])$ y supongamos que $f(a) = f(b)$ y que $m < f(a) < M$. Prueba que f toma todo valor de $[f(a), M[\cup]m, f(a)]$ en al menos dos puntos de $[a,b]$.

Solución. Una gráfica indica enseguida lo que hay que hacer. Sean $u, v \in [a,b]$ tales que $f(u) = m$ y $f(v) = M$. Observa que como $m < f(a) = f(b) < M$ debe ser $u \neq v$ y ambos deben ser distintos de a y de b. Supongamos que $u < v$.

Consideremos los tres intervalos $[a,u]$, $[u,v]$ y $[v,b]$. Sabemos que la imagen de un intervalo por una función continua es un intervalo. Como $f(a), f(u) \in f([a,u])$ y $f[a,u]$ es un intervalo, todos los números comprendidos entre $f(a)$ y $f(u) = m$ tienen que estar en $f[a,u]$ (recuerda la propiedad que define a los intervalos). Se sigue que $f([a,u]) \supset [f(u), f(a)] = [m, f(a)]$. Análogamente, como $f(b), f(v) \in f([v,b])$ se sigue que $f([v,b]) \supset [f(b), f(v)] = [f(a), M]$. Y, claro está, $f([u,v]) = [m, M]$. Pongamos $A = [a,u[\cup]v,b]$. Tenemos que

$$f(A) = f([a,u[) \cup f(]v,b]) \supset]m, f(a)] \cup [f(a), M[=]m, M[.$$

Como $A \cap [u,v] = \emptyset$, se sigue que cada valor en $]m, M[$ es tomado por f en al menos dos puntos: uno en A y otro en $]u,v[$. ☺

Comentarios. Muchos hacen este ejercicio razonando sobre una gráfica. Una gráfica no demuestra nada. Lo que yo valoro es que sepas expresar matemáticamente lo que ves en la gráfica.

Ejercicio 5. Calcula la imagen de la función $f:]-1,1[\to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Solución. La función f es continua porque es cociente de funciones continuas cuyo denominador no se anula. Como la función está definida en un intervalo y es continua su imagen es un intervalo. Sea $J = f(]-1,1[)$ la imagen de f. Como $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = -\infty$ se sigue que la función f toma valores negativos arbitrariamente pequeños, es decir, J no está minorado. Como $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$ se sigue que la función f toma valores positivos arbitrariamente grandes, es decir, J no está mayorado. El único intervalo que no está mayorado ni minorado es $\mathbb{R}$. Por tanto $J = \mathbb{R}$. ☺

Comentarios. En este ejercicio, salvo excepciones, no justificáis nada. Simplemente escribís los límites de f y afirmáis que la imagen es todo $\mathbb{R}$. Lo que yo valoro es que sepas justificar el resultado. Porque debes decir que la función es continua y que está definida en un intervalo y que en esas condiciones sabemos que la imagen es un intervalo. Si no justificas que la imagen es un intervalo, el que $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$ no permite concluir que la imagen es todo $\mathbb{R}$ (la función podría dar saltos si tuviera discontinuidades o, siendo continua, si no estuviera definida en un intervalo).

En clase he dicho que en $\mathbb{R}$ hay dos infinitos: $-\infty$ y $+\infty$. El símbolo ∞ no existe, está prohibido usarlo en la recta real.

Ejercicio 6. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(0) = 0$. Justifica, haciendo uso de las propiedades de la exponencial, que f es continua en $\mathbb{R}$, estrictamente decreciente en $\mathbb{R}^-$ y estrictamente creciente en $\mathbb{R}^+$. Calcula la imagen de f.

Solución. La función $x \mapsto -1/x^2$ es continua en $\mathbb{R}^*$ y la función exponencial es continua en $\mathbb{R}$, por tanto la función f es continua en $\mathbb{R}^*$. Puesto que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$, se sigue que:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\mathrm{e}^{1/x^2}} = 0 = f(0).$$

Por tanto, f es también continua en 0. Por tanto f es continua en $\mathbb{R}$. Teniendo en cuenta que la exponencial es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$, tenemos que:

$$0 < x < y \implies x^2 < y^2 \implies \frac{1}{y^2} < \frac{1}{x^2} \implies \frac{-1}{x^2} < \frac{-1}{y^2} \implies f(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2} < \mathrm{e}^{-1/y^2} = f(y).$$

Lo que prueba que f es estrictamente creciente en $\mathbb{R}^+$. Análogamente, teniendo en cuenta que $f(x) = f(-x)$ y usando lo ya probado, resulta :

$$x < y < 0 \implies 0 < -y < -x \implies f(y) = f(-y) < f(-x) = f(x).$$

Lo que prueba que f es estrictamente decreciente en $\mathbb{R}^-$.

Sea $J = f(\mathbb{R})$ la imagen de f. Como $\mathbb{R}$ es un intervalo y f es continua, J es un intervalo. Como $f(x) = f(-x)$ se tiene que $J = f([0,+\infty[)$. Como f es estrictamente creciente en $[0,+\infty[$ se verifica que:

$$J = f([0,+\infty[) = [f(0), \lim_{x\to +\infty} f(x)[= [0,1[.$$

☺

Comentarios. Hay que justificar que la imagen de f es $[0,1[$ cosa que casi nadie hace. Para ello hay que justificar que la imagen de f es un intervalo. A partir de ahí puede hacerse como arriba o razonando que la imagen debe estar contenida en $[0,1[$ porque $0 \leqslant f(x) < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Además, $0 = f(0)$ está en la imagen y, como $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1$, se sigue que en la imagen de f hay valores tan próximos a 1 como queramos, luego necesariamente, la imagen de f ha de ser todo el intervalo $[0,1[$. Algunos derivan para estudiar la monotonía. No es necesario y el enunciado lo dice bien claro.

Ejercicio 7. Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ la función dada para todo $x \neq 1$ por

$$f(x) = \operatorname{arc\,tg} \frac{1+x}{1-x}.$$

Estudia la continuidad de f y los límites en el punto 1, en $+\infty$ y en $-\infty$. Calcula la imagen de f.

Solución. Pongamos $h(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$. La función h es racional y sabemos que toda función racional es continua en su dominio natural de definición, que para la función h es el conjunto $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Como la función arcotangente es continua en $\mathbb{R}$, concluimos que $f = \operatorname{arc\,tg} \circ h$ es continua en $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ por ser composición de funciones continuas. Puesto que $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arc\,tg} x = -\pi/2$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arc\,tg} x = \pi/2$, tenemos que:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{1+x}{1-x} = +\infty \Longrightarrow \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{1+x}{1-x} = -\infty \Longrightarrow \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

Por otra parte se tiene que:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1+x}{1-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1+x}{1-x} = -1 \Longrightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \operatorname{arc\,tg}(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

Aunque la función f es continua no está definida en un intervalo. Pongamos $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Como $f(D) = \operatorname{arc\,tg}(h(D))$, empezaremos por calcular $h(D)$. Pero esto es muy fácil pues si $z \neq -1$ se tiene que:

$$h(x) = z \iff 1 + x = z - zx \iff x(1+z) = z - 1 \iff x = \frac{z-1}{z+1}.$$

Es decir, la función $h(x)$ toma el valor z en el punto $x = \dfrac{z-1}{z+1}$. Por otra parte, es fácil ver que la función h no toma el valor -1. Por tanto $h(D) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Como la función arcotangente es una biyección de $\mathbb{R}$ sobre el intervalo $]-\pi/2, \pi/2[$, concluimos que:

$$f(D) = f(\mathbb{R} \setminus \{-1\}) =]-\pi/2, \pi/2[\setminus \{-\pi/4\}$$

☺

Comentarios. En 1 no hay discontinuidad de salto porque la función no está definida en 1 y no tiene sentido hablar de la continuidad de una función en un punto en el que no está definida. Si definimos $f(1) = 0$, entonces sí tendríamos en 1 una discontinuidad de salto. Observa que la imagen de f no es un intervalo. También puede calcularse la imagen de f calculando por separado las imágenes por f de los intervalos $A =]-\infty, 1[$ y $B =]1, +\infty[$. Para ello es útil darse cuenta de que la función h es estrictamente creciente y por tanto f es estrictamente creciente, lo que permite calcular $f(A)$ y $f(B)$ evaluando los límites de f en los extremos de dichos intervalos.

Algunos usan grados y afirman cosas como $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = 90$. Pues no, eso no es correcto. Algunos calculan los límites $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1+x}{1-x}$ usando las reglas de L'Hôpital. Eso es una exageración.